

Geometric constraint solver – Espace des quadriques affines

Christian Arber, Fabio Gironella le 09/02/2024

Table des matières

Geometric constraint solver – Espace des quadriques affines	1
Introduction.....	1
Geometric Constraint Solver (GCS)	1
Géométries et contraintes	1
Résolution.....	2
Différentes approches de résolution.....	2
L’approche différentielle de TopSolid	3
Sujet SEMES : extension de cette approche différentielle sur l’espace des sphères à l’espace des coniques	3
Questions en suspens, objet de la SEMES.....	4
Références.....	4

Introduction

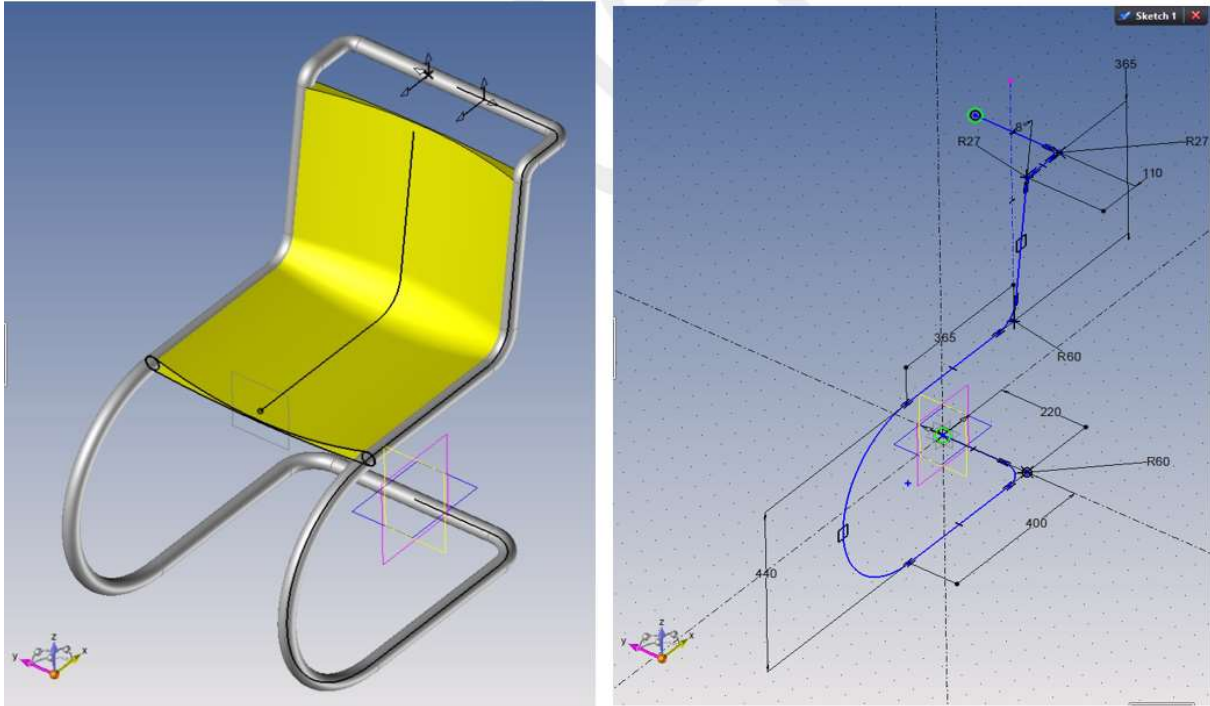
Dans l’industrie de conception et de fabrication, c’est-à-dire celle qui conçoit et fabrique nos objets du quotidien, on manipule des formes géométriques. Autrefois décrites dans des plans en 2D, elles sont maintenant conçues au moyen de logiciels de CAD (Computer Aided Design) et de CAM (Computer Aided Manufacturing) opérant en 3D, dans une réalité virtuelle la plus réaliste possible, puis projetées en 2D pour réaliser des plans de conception et de fabrication.

Les géométries sont construites à partir d’éléments géométriques de base (point, ligne, cercle, coniques, courbes et surfaces polynomiales, ...) satisfaisant à des contraintes géométriques (coïncidence, tangence, distance, angle, surface, volume, ...).

Geometric Constraint Solver (GCS)

Géométries et contraintes

Un utilisateur devant créer un objet commence par créer des esquisses devant satisfaire des contraintes, en 2D ou 3D, qui seront les squelettes des objets. L’utilisateur dessine ces géométries, leur applique des contraintes, ce qui donne un GCS (Geometric constraint system).



Résolution

Un solver les résout en permanence (Geometric constraint solver), et cette résolution n'est plus à la charge du dessinateur, ingénieur industriel de l'ancien temps (qui était donc un excellent géomètre en général !), mais à la charge du logiciel qui fournit la solution la plus proche de la situation initiale donnée par l'utilisateur, au sens d'une métrique cachée.

Cet algorithme de résolution, qui met en jeu un nombre très important de géométries liées par des contraintes, est un composant essentiel d'un logiciel de CAD/CAM, et plus généralement de tout logiciel de CAGD (Computer Aided Geometric Design).

Différentes approches de résolution

Deux approches, complémentaires, sont en balance :

Une approche purement informatique : un GCS est considéré comme un graphe dont les sommets sont des géométries, et les arêtes les contraintes. On essaie alors d'extraire de ce graphe des sous graphes que l'on saura résoudre avec des algorithmes simples (cercle passant par trois points, courbe polynomiale interpolant des points, intersection de deux courbes, ...) et la figure sera progressivement résolue en remontant par résolution les nœuds d'un arbre de construction issu du graphe. A chaque nœud de l'arbre correspondra un algorithme de résolution. La difficulté est d'extraire un bon arbre de résolution du graphe.

Une approche purement mathématique : chaque géométrie est codée sous forme d'objets mathématiques (points d'une variété différentielle de dimension n , paramétrée localement par n paramètres ...) et les contraintes sous forme d'équations liant les paramètres des objets. On aboutit in fine à un système d'équations qu'il s'agit de résoudre par une méthode numérique. La résolution peut se faire au moyen d'une résolution algébrique utilisant la géométrie algébrique (point intersection de deux cercles), car la plupart des équations sont polynomiales, ou d'une résolution différentielle utilisant les techniques de géométrie différentielle (descente de Newton, géodésique dans un espace Riemannien, ...).

Un bon solveur va utiliser les deux approches. L'approche purement informatique permet de diminuer la taille du problème à résoudre, l'approche mathématique, et en particulier l'approche différentielle, permet de résoudre en même temps un ensemble de géométries, ce qui donne en général un résultat plus satisfaisant par rapport à la solution naturelle attendue par un utilisateur, puisque dans le cas de l'approche différentielle on pourra minimiser une fonction d'énergie et se rapprocher de la solution « naturelle ». L'approche différentielle est par nature plus rapide que l'approche algébrique, car elle ne recherche pas toutes les solutions, mais la solution la plus proche d'une situation initiale.

On pourra trouver un exposé général du très vaste sujet GCS, et des différentes méthodes utilisées, dans :

(Sitharam Meera, 2019)

Handbook of GCS principles: Handbook of geometric constraint systems principles edited by Meera Sitharam, Audrey St John, Jessica Sidman – CRC Press.

L'approche différentielle de TopSolid

TopSolid est un logiciel de CAD/CAM (français !) qui implémente un solveur GCS. Pour simplifier, la partie mathématique du solveur formalise les géométries de base sous forme de (paramètre, points, lignes, cercles) comme éléments d'un espace appelé espace des sphères. Les autres géométries plus évoluées sont formulées comme des géométries dépendantes des géométries de base (conique à centre, grand axe, petit axe, courbe polynomiale par points de contrôle, ...). Cet espace des sphères est un sous-espace de l'ensemble des formes quadratiques, et est lui-même muni d'une forme quadratique naturelle, qui permet de formaliser les contraintes à partir de valeurs prises par cette forme quadratique sur deux géométries de base.

A l'intérieur de cet espace, on pourra faire opérer le groupe des transformations de la forme quadratique, et déplacer les objets de façon qu'ils satisfassent au mieux les contraintes. On peut résoudre les transformations qui s'appliquent aux objets de base par une approche de minimisation d'une norme posée sur les contraintes.

Cette approche est décrite dans l'article :

(Arber & Jean, 2015) : **Christian Arber, Frédéric Jean : La mécanique des sphères de Lie: un futur pour la CAO?: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01175755>**

Du point de vue mathématique, l'espace des sphères est explicité dans :

(Berger, 1990) : **Marcel Berger 1990, Geometry T1 & T2, Chapter 20**

(Cecil T, 2007) : **T.E Cecil 2007, Lie Sphere Geometry with application to manifolds**

Sujet SEMES : extension de cette approche différentielle sur l'espace des sphères à l'espace des coniques

L'espace des sphères ne permet pas de résoudre directement des coniques (autres que cercle, ligne, point) entre elles, bien que l'espace des sphères soit un sous-espace vectoriel de l'espace des formes quadratiques.

Une question naturelle est donc de comprendre si on peut plonger avec profit le problème dans un espace plus grand, muni d'une bonne forme quadratique ou d'une bonne métrique Riemannienne (ou pseudo-Riemannienne), permettant de résoudre des coniques (quadriques) et peut être plus comme objets d'une variété riemannienne satisfaisant à des contraintes. La satisfaction des contraintes se

faisant en parcourant une géodésique amenant les géométries d'une situation initiale non résolue, à une situation finale résolue (ou résolue au mieux).

Il existe par ailleurs des problèmes mathématiques qui ont suscité l'étude de métriques riemanniennes sur l'espace des formes quadratiques, et on peut se poser la question de savoir si cette approche ne pourrait pas être utilisée dans le cas des GCS. Un certain nombre de résultats sont disponibles.

(Bonnabel & Sepulchre, 2009) : [Bonnabel, Sepulchre 2009, Riemannian metric and geometric mean for positive semi definite matrices of fixed rank \(2009\)](#)

Questions en suspens, objet de la SEMES

On pourra donc se poser la question si la métrique proposée dans ces articles est susceptible de fonctionner pour un GCS (Geometric Constraint Solver), et si finalement elle est une extension générale du cas particulier de l'espace des sphères traité actuellement dans TopSolid.

Ceci nécessitera de formuler le problème avec ses objets géométriques et ses contraintes :

- Les objets de base usuels, point, ligne (hyperplan), cercles doivent bien sûr être des éléments de l'espace géométrique considéré, ce qui est le cas si on considère l'espace des quadriques
- Une bonne formulation doit conduire à des solutions qui sont indépendantes du « repère » dans lequel on calcule. En gros la métrique Riemannienne doit être invariante par les transformations de repère.
- Formuler les contraintes essentielles entre deux objets géométriques. Parmi celles-ci :
 - Contrainte de coïncidence entre un point et un objet géométrique
 - Contrainte de tangence en un point d'une ligne (hyperplan) avec la conique (quadrique) ou l'objet géométrique plus général.
 - Contrainte de distance entre deux points
 - Contrainte d'angle entre deux lignes (hyperplans)

Puis en traitant complètement un problème académique a priori simple (intersection de deux coniques, point sur une conique, tangence d'une ligne à une conique, ...) à déterminer par les mathématiciens, de comprendre si on peut obtenir une bonne convergence en utilisant cette variété munie de cette métrique riemannienne. Ceci nécessitera de bien comprendre ce que sont les géodésiques de cette variété riemannienne.

Références

Arber, C., & Jean, F. (2015). La mécanique des sphères de Lie: un futur pour la CAO. *SMF - Journée Annuelle - Des mathématiques au monde socio économique*, 2-16.

Berger, M. (1990). *Géométrie Tome 1 et Tome 2*. Cassini.

Bonnabel, & Sepulchre. (2009). Riemannian metric and geometric mean for positive semi definite matrices of fixed rank. *SIAM J. MATRIX ANAL. APPL - Vol 31 N°3*, pp. 1055-1070.

Cecil T, E. (2007). *Lie Sphere Geometry with application to manifolds*.

Sitharam Meera, S. J. (2019). *Handbook of Geometric Constraint Systems Principles*. CRC Press.

GCS sur l'espace des quadriques

1 L'espace des quadriques affines

Les quadriques dans l'espace affine \mathbb{R}^n sont les ensembles de zéros des polynômes quadratiques (non nuls)

$$p(X) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c,$$

où $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$, et $a_{i,j}$, b_i et c sont des nombres réels pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Cela peut être réécrit de manière plus concise comme

$$p(X) = X^T A X + B^T X + C = \begin{pmatrix} X^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B^T/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice réelle $n \times n$, $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur colonne de taille n avec des composantes réelles, et $C = c \in \mathbb{R}$ est un nombre réel. Le polynôme lui-même peut alors être naturellement identifié avec la matrice symétrique $(n+1) \times (n+1)$ $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B^T/2 & C \end{pmatrix}$.

Notez également qu'un polynôme p et tous ses multiples réels non nuls λp , avec $\lambda \in \mathbb{R}_* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, définissent le même lieu de zéros, c'est-à-dire la même quadrique. L'ensemble des quadriques affines \mathcal{AQ}_n dans \mathbb{R}^n est donc naturellement identifié avec le quotient de l'espace \mathcal{S}_{n+1} des matrices symétriques $(n+1) \times (n+1)$ modulo l'action de \mathbb{R}_* donnée par le redimensionnement. Étant donné $\tilde{A} \in \mathcal{S}_{n+1}$, nous désignerons par $[\tilde{A}]$ sa classe d'équivalence dans $\mathcal{S}_{n+1}/\mathbb{R}_*$, c'est-à-dire la quadrique dans \mathcal{AQ}_n définie comme son lieu de zéros.

Soit maintenant Aff_n le groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n , à savoir des transformations de la forme

$$\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix},$$

L'action de $\text{Aff} \hat{\Theta}: \text{Aff}_n \times \mathcal{S}_{n+1} \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$ donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{A} := \begin{pmatrix} a^T & 0 \\ b^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B^T/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^T A a & a^T A b + \frac{a^T B}{2} \\ b^T A a + \frac{B^T b}{2} & b^T A b + \frac{B^T b + b^T B}{2} + C \end{pmatrix} \quad (1)$$

sur l'espace des matrices symétriques donne une action bien définie

$$\Theta: \text{Aff}_n \times \mathcal{AQ}_n \rightarrow \mathcal{AQ}_n, \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, [\tilde{A}] \right) \mapsto \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \tilde{A} \right]$$

Le problème de la classification des matrices symétriques $(n+1) \times (n+1)$, et donc des quadriques affines, jusqu'à l'action affine est bien compris. La liste des formes normales possibles est donnée par exemple dans [RT11, Théorème 8.13]. Pour nos besoins, il suffit de rappeler que la forme normale d'une matrice symétrique donnée $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{n+1}$ est uniquement déterminée par le rang et la signature de A et de \tilde{A} (et toutes les combinaisons de quadruples ne sont pas autorisées, car il existe bien sûr des relations qui doivent être satisfaites entre ces invariants).

1.1 Stabilisateurs de l'action Θ de Aff_n

Pour un $\hat{A} \in \mathcal{S}_{n+1}$ fixé, l'action $\hat{\Theta}$ donne une application $\hat{\Theta}_{\hat{A}}: \text{Aff}_n \rightarrow \mathcal{S}_{n+1}$, $X^T \mapsto X\hat{A}X$. Le stabilisateur de \hat{A} est donné, par définition, par

$$\text{Stab}_{\hat{A}} = \{\hat{a} \in \text{Aff}_n \mid \hat{a}\hat{A}\hat{a}^T = \hat{A}\}.$$

Notez que si \hat{A} est conjugué via l'action Θ à une autre matrice symétrique \hat{A}' , c'est-à-dire $\hat{A}' = \hat{a}_0^T \hat{A} \hat{a}_0$ pour un certain $\hat{a}_0 \in \text{Aff}_n$, alors $\text{Stab}_{\hat{A}'}$ est conjugué à $\text{Stab}_{\hat{A}}$ via X_0 en tant que sous-groupe de Aff_n , c'est-à-dire

$$\text{Stab}_{\hat{A}'} = \hat{a}_0^{-1} \text{Stab}_{\hat{A}} \hat{a}_0.$$

Selon la classification dans [RT11, Théorème 8.13], il y a alors trois cas qualitativement différents à étudier, afin de comprendre toutes les classes d'isomorphisme possibles (jusqu'à la conjugaison) des stabilisateurs, à savoir :

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} \text{Id}_{p,q,n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} \text{Id}_{p,q,n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{A}_3 = \begin{pmatrix} \text{Id}_{p,q,n} & b_3 \\ b_3^T & 0 \end{pmatrix} \text{ où } b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } p+q < n.$$

Ici, $0 \leq p+q \leq n$ pour les trois cas, et $\text{Id}_{p,q,n}$ désigne la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont les premières p entrées diagonales sont égales à $+1$, les q entrées diagonales suivantes sont égales à -1 , et le reste des entrées diagonales est égal à 0 .

Nous ne traitons dans ces notes que le cas de \hat{A}_1 , à titre d'exemple ; les autres sont analogues et laissés en tant qu'exercice pour le SEMES.

Afin de calculer $\text{Stab}_{\hat{A}_1}$, revenons à (1), qui indique que $X \in \text{Stab}_{\hat{A}_1}$ si et seulement si, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}_*$, nous avons

$$\begin{cases} a^T \text{Id}_{p,q,n} a = \lambda \text{Id}_{p,q,n} \\ a^T \text{Id}_{p,q,n} b = 0 \\ b^T \text{Id}_{p,q,n} b = 0 \end{cases}.$$

En raison de l'inversibilité de a , la deuxième équation indique que b a des entrées non nulles arbitraires seulement aux positions $n-p-q+1, \dots, n$; la troisième équation est alors automatiquement vraie. Dans la première équation, en incorporant $\sqrt{|\lambda|}$ dans a , nous pouvons supposer que $\lambda = \pm 1$. En fait, l'analyse de la signature du côté gauche et du côté droit de la première équation permet de conclure que $\lambda = -1$ ne peut se produire que si $p = q = n/2$ (et en particulier n doit être pair). Nous laissons comme exercice pour le SEMES l'analyse de ce cas, et supposons ici que cela ne se produit pas, de sorte que $\lambda = +1$ nécessairement. En rappelant le facteur multiplicatif positif caché $\alpha := \sqrt{|\lambda|}$, nous obtenons alors

$$\text{Stab}_{\hat{A}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}_{>0}, a \in \text{O}_n(p, q), b^T = \overbrace{(0 \dots 0)^{p+q}}^{\text{fois}} * \right\},$$

où $\text{O}_n(p, q)$ est le groupe orthogonal de $\text{Id}_{p,q,n}$, c'est-à-dire le groupe de $a \in \text{GL}_n$ tel que $a^T \text{Id}_{p,q,n} a = \lambda \text{Id}_{p,q,n}$.

Pour être encore plus explicite, nous voulons mieux comprendre $\text{O}_n(p, q)$. Pour cela, écrivons $\text{Id}_{p,q,n}$ sous forme de blocs

$$\text{Id}_{p,q,n} := \begin{pmatrix} \text{Id}_{p,q} & 0 \\ 0 & 0_{n-p-q} \end{pmatrix},$$

où $\text{Id}_{p,q} = \text{Id}_{p,q,0}$, et 0_k désigne la matrice nulle de taille $k \times k$. Nous pouvons alors écrire a en blocs comme

$$a = \begin{pmatrix} a_{p,q} & a_{r,1} \\ a_{r,2}^T & a_{r,r} \end{pmatrix},$$

où r signifie “reste”, et la condition $a \in O_n(p, q)$ s’écrit comme

$$\begin{cases} a_{p,q} \text{Id}_{p,q} a_{p,q} = \text{Id}_{p,q} \\ a_{p,q}^T \text{Id}_{p,q} a_{r,1} = 0 \\ a_{r,1}^T \text{Id}_{p,q} a_{p,q} = 0 \\ a_{r,1}^T \text{Id}_{p,q} a_{r,1} = 0 \end{cases} .$$

La première équation implique que $a_{p,q} \in O(p, q) = O_{p+q}(p, q)$, où ce dernier est le groupe orthogonal de $\text{Id}_{p,q}$; en particulier, $a_{p,q}$ est inversible. En conséquence, la deuxième et/ou la troisième équation impliquent que $a_{r,1} = 0$. Les $a_{r,2}$ et $a_{r,r}$ restants sont sans contrainte.

En conclusion, nous pouvons écrire

$$\text{Stab}_{\hat{A}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha a_{p,q} & 0 & 0 \\ \alpha a_{r,2}^T & \alpha a_{r,r} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}_{>0}, a_{p,q} \in O(p, q), a_{r,2} \in \mathbb{R}^{p+q}, a_{r,r} \in \text{GL}_r, b \in \mathbb{R}^{n-p-q} \right\},$$

dans le cas où $p = q = n/2$ ne se produit pas.

Tâche 1. Déterminez le stabilisateur de \hat{A}_1 dans le cas où $p = q = n/2$, ainsi que ceux de \hat{A}_2 et \hat{A}_3 .

1.2 La métrique riemannienne sur les strates de $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n$

Sur l’espace GL_{n+1} , il existe une métrique riemannienne naturelle, invariante par GL_{n+1} par rapport à l’action naturelle à droite par multiplication, définie de la manière suivante : $X \in \text{GL}_{n+1}$ et $\eta, \nu \in T_A \text{GL}_{n+1} = M_{(n+1) \times (n+1)}$, où ce dernier est l’espace des matrices $(n+1) \times (n+1)$. Nous définissons

$$\bar{g}_X(\eta, \nu) = \text{tr}((X^{-1})^T \eta^T \nu X^{-1}).$$

Que cela soit définie-positif découle du fait que $\bar{g}_X(\eta, \eta) = \text{tr}((\eta X^{-1})^T (\eta X^{-1}))$ n’est rien d’autre que la norme de Frobenius de ηX^{-1} , et donc strictement positive à moins que $\eta X^{-1} = 0$, c’est-à-dire $\eta = 0$. Comme $\text{Aff}_n \subset \text{GL}_{n+1}$, la métrique riemannienne \bar{g} induit une métrique riemannienne, que nous dénotons toujours par \bar{g} , sur Aff_n .

Soit maintenant $X \in \text{Stab}_{\hat{A}_1}$. Désignons par \mathcal{V}_X l’espace vertical de l’application $\hat{\Theta}_{\hat{A}_1}$, c’est-à-dire $T_X \text{Stab}_{\hat{A}_1}$. Il est donné par

$$\mathcal{V}_X = X \cdot T_{\text{Id}} \text{Stab}_{\hat{A}_1} = \left\{ X \begin{pmatrix} \eta_{p,q} & 0 & 0 \\ \eta_{r,2}^T & \eta_{r,r} & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \eta_{p,q} \in \mathcal{AS}_{p,q}, \eta_{r,2} \in \mathbb{R}^{p+q}, \eta_{r,r} \in M_{r \times r}, \gamma \in \mathbb{R}^{n-p-q} \right\}$$

où $\mathcal{AS}_{p,q}$ est l’espace des matrices antisymétriques par rapport à $\text{Id}_{p,q}$, c’est-à-dire $\eta_{p,q}^T = -\text{Id}_{p,q} \eta_{p,q} \text{Id}_{p,q}$.

L’espace horizontal \mathcal{H}_X est alors défini comme le complémentaire orthogonal de \mathcal{V}_X dans $T_X \text{Aff}_n$ par rapport à \bar{g}_X . Il est donné par

$$\mathcal{H}_X = \left\{ (X^{-1})^T \begin{pmatrix} \zeta_{p,q} & \zeta_{r,1} & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X^T X \mid \zeta_{p,q} \in \mathcal{S}_{p,q}, \zeta_{r,1} \in \mathbb{R}^{p+q}, \beta \in \mathbb{R}^{p+q} \right\},$$

où $\mathcal{S}_{p,q}$ est l’espace des matrices qui sont symétriques par rapport à $\text{Id}_{p,q}$. L’égalité découle simplement du fait que tous ces vecteurs sont effectivement orthogonaux par rapport à \bar{g}_X à ceux de \mathcal{V}_X , et par un décompte de dimensions. (Remarquons que $\mathcal{S}_{p,q}$ est Frobenius-orthogonal à $\mathcal{AS}_{p,q}$ simplement parce que la trace d’une matrice transposée est la même que celle de la matrice originale.) Notons que, par construction, la restriction de $d\hat{\Theta}_{\hat{A}_1}$ à \mathcal{H}_X donne un isomorphisme sur $T_X \mathcal{S}_{n+1}^{p,q}$, où $\mathcal{S}_{n+1}^{p,q}$ est l’espace des matrices symétriques de signature $(p, q, n+1-p-q)$.

Tâche 2. Prouvez que la restriction de \bar{g}_X à \mathcal{H}_X induit, via $d\hat{\Theta}_{\hat{A}_1}$, un produit scalaire sur $T_{[X]} \mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p,q}$, où $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p,q}$ est l’espace des quadriques définies par des polynômes tels que la matrice symétrique associée ait pour signature $(p, q, n+1-p-q)$.

Cela constitue une métrique riemannienne $g^{p,q}$ sur $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p,q}$.

Tâche 3. Trouvez le cas manquant de $p = q = n/2$ pour \hat{A}_1 , ainsi que ceux de \hat{A}_2 et \hat{A}_3 .

Le point de vue est maintenant de travailler séparément sur chacun des sous-ensembles $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p,q} \subset \mathcal{A}\mathcal{Q}_n$ via les métriques associées.

2 Étude des contraintes et applications

Nous souhaitons maintenant étudier certaines contraintes typiques entre les quadriques, et trouver leurs expressions, en tant que fonctions à valeurs réelles, dans la paramétrisation (stratifiée) de l'espace des quadriques en termes de matrices symétriques qui a été décrite dans Section 1.

Tâche 4. Décrivez explicitement en termes de matrices symétriques associées (de signature fixée) les contraintes suivantes.

1. Quadrique passant par un point donné.
2. Ellipses étant des sphères (c'est-à-dire égalité des excentricités sur tous les axes).
3. Intersection de deux quadriques en un point donné avec un angle donné entre les tangentes en ce point.

3 Descente de Newton et GCS

Nous abordons maintenant le cœur du problème, à savoir la mise en œuvre de cette nouvelle approche afin d'obtenir un *Geometric Constraints Solver*, ou *GCS* en abrégé comme dans le titre.

Pour cela, l'approche consiste à collecter un certain tuple (q_1, \dots, q_k) de quadriques dans $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n$, plus précisément $q_i \in \mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p_i, q_i}$, à écrire les contraintes souhaitées à l'aide de fonctions à valeurs réelles F_1, \dots, F_N , puis à essayer de minimiser via la descente de Newton la fonction

$$\mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p_1, q_1} \times \mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p_k, q_k} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q_1, \dots, q_k) \mapsto \sum_{i=1}^N F_i^2(q_1, \dots, q_k),$$

par rapport aux métriques construites g^{p_i, q_i} sur $\mathcal{A}\mathcal{Q}_n^{p_i, q_i}$.

Tâche 5. Implémentez cette approche de descente de Newton.

4 Quelques références

Les références principales sont les suivantes :

- La classification affine des quadriques dans [RT11, Théorème 8.13].
- Les articles [BS09, VAV13] qui traitent (de manière légèrement différente) de la géométrie riemannienne stratifiée dans le cas défini positif. L'approche que nous utilisons ici est plus proche de celle de [VAV13].

Ces autres références pourraient être utiles pour des comparaisons :

- La thèse [Tha22] qui traite du cas défini positif.

References

- [BS09] Silvère Bonnabel and Rodolphe Sepulchre. Riemannian metric and geometric mean for positive semidefinite matrices of fixed rank. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 31(3):1055–1070, 2009.
- [RT11] Agustí Reventós Tarrida. *Affine maps, Euclidean motions and quadrics*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer, London, 2011.
- [Tha22] Yann Thanwerdas. *Riemannian and stratified geometries on covariance and correlation matrices*. Theses, Université Côte d’Azur, May 2022.
- [VAV13] Bart Vandereycken, P.-A. Absil, and Stefan Vandewalle. A Riemannian geometry with complete geodesics for the set of positive semidefinite matrices of fixed rank. *IMA J. Numer. Anal.*, 33(2):481–514, 2013.